

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta = ab(b-a)(a-1)(b-1)$.

b) Sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta \neq 0$. Rezultă $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $a \neq b$.

c) Evident $\text{rang } A \leq \text{rang } \bar{A}$. Coloana termenilor liberi este aceeași cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este și minor al matricei sistemului. Ca urmare, $\text{rang } \bar{A} \leq \text{rang } A$, deci $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$, adică sistemul este compatibil, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2.a) $f^2 = (\hat{2}X + \hat{1})^2 = \hat{1}$, polinom care are gradul 0.

b) Cum $f \cdot f = \hat{1}$, f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$ și $f^{-1} = f$.

c) Fie $g \in \mathbb{Z}_4[X]$, $g = ax + b$, $a \neq \hat{0}$, astfel încât $g^2 = \hat{1}$. Rezultă
$$\begin{cases} a^2 = \hat{0} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \\ b^2 = \hat{1} \end{cases}$$
 Obținem $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$ și $a = \hat{2}$.

Obținem două polinoame cu proprietatea cerută în enunț: $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$ și $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.